Nombre y Apellidos:______________________________ **Carné:**________________

Universidad Simón Bolívar
Dpto. Electrónica y Circuitos
EC3514 - Robótica PRIMER PARCIAL
Viernes, 28 de Mayo de 2010.

1. Cinemática Directa (12 ptos)

Dado el brazo robotico de 4 GDL (PRPR) que se muestra en la Figura 1. Proceda a lo siguiente:

- **(4 ptos)** Dibuje los sistemas de coordenadas locales siguiendo la convención de Denavit-Hartenberg.
- **(4 ptos)** Determine cada uno de los parámetros D-H del manipulador (θ,d,a,α).
- **(4 ptos)** Calcule las matrices de transformación homogenea parciales y la matriz final A_0^4.

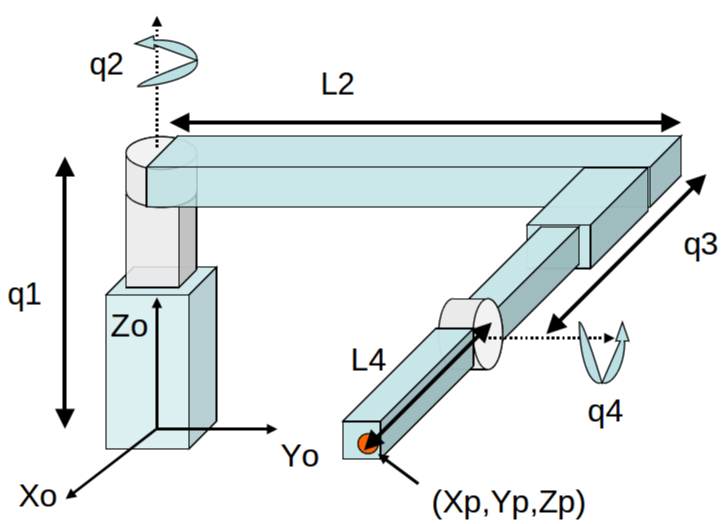


Figura 1: Robot PRPR

2. Cinematica Inversa (11 ptos)

Se tiene un robot PRR de 3GDL tal como se ilustra en la Figura 2. Se conocen los largos de cada eslabon $L_1 = 1$, $L_2 = 5$ y $L_3 = 5$. Para dicho robot determine:

- **(6 ptos)** La expresion de la cinematica inversa para cada uno de los grados de libertad (q_1,q_2,q_3).
- **(4 ptos)** Usando la cinematica inversa, calcule y complete los valores de (q_1,q_2,q_3) para la Tabla 2

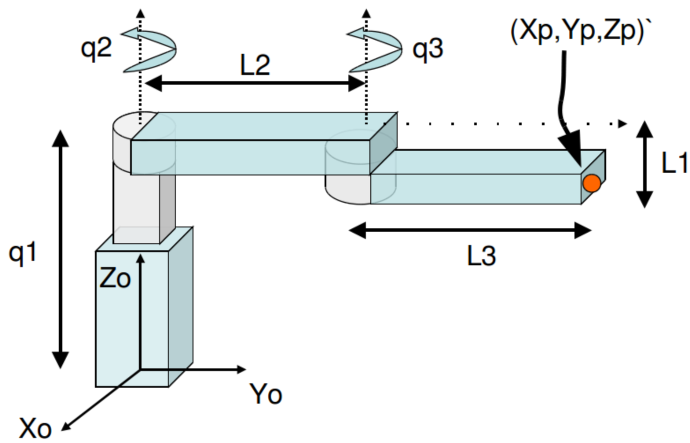


Figura 2: Robot PRR

X	Y	Z	q_1	q_2	q_3
5	5	1			
0	10	0			
-10	0	4			
0	0	-1			

(1)

3. Rotaciones (3 ptos)

Supongan que se tienen 3 sistemas de coordenadas SC1, SC2 y SC3, descritos por sus respectivos ejes (X_i, Y_i, Z_i). También se tienen las matrices R_1^2 y R_1^3. Proceda a determinar la matriz de rotación que relaciona los sistemas 2 y 3 (R_2^3)

$$\mathbf{R_1^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{R_2^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

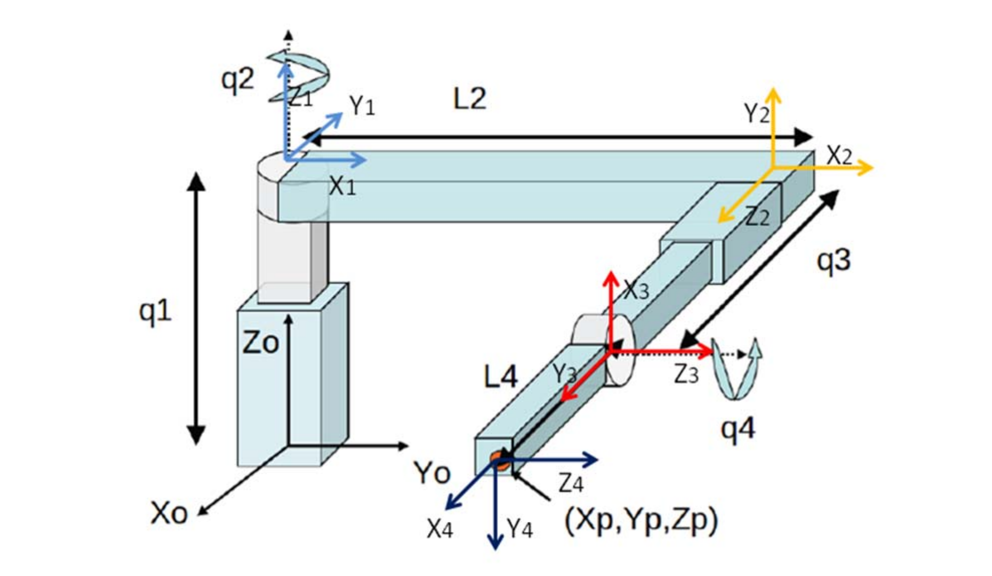
4. Teoría: (2 ptos c/u)

4.1. Considere una matriz de transformación homogénea A_M^N. Diga que representan cada una de sus columnas.

4.2. Al utilizar la convención de Denavit-Hartenberg para calcular la cinemática directa de un manipulador, ¿qué utilidad tiene colocar el último sistema de coordenadas sobre el elemento final?

1 Cinemática directa

Ejes de coordenada según D-H



Parámetros del Manipulador

Link	θ	d	a	α
1	π/2	q1	0	0
2	q2	0	L2	π/2
3	π/2	q3	0	π/2
4	π/2+q4	0	L4	0

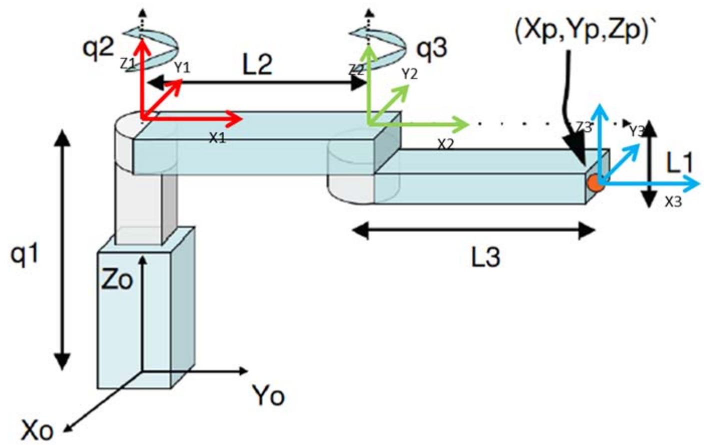
Matrices

$$A_0^{\;1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_1^{\;2} = \begin{pmatrix} \cos(q2) & 0 & \sin(q2) & L2\cdot\cos(q2) \\ \sin(q2) & 0 & -\cos(q2) & L2\cdot\sin(q2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2^{\;3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & q3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_3^{\;4} = \begin{pmatrix} -\sin(q4) & -\cos(q4) & 0 & -L4\cdot\sin(q4) \\ \cos(q4) & -\sin(q4) & 0 & L4\cdot\cos(q4) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{\;4} = \begin{pmatrix} \cos(q2)\cdot\cos(q4) & -\cos(q2)\cdot\sin(q4) & -\sin(q2) & q3\cdot\cos(q2) - L2\cdot\sin(q2) + L4\cdot\cos(q2)\cdot\cos(q4) \\ \cos(q4)\cdot\sin(q2) & -\sin(q2)\cdot\sin(q4) & \cos(q2) & L2\cdot\cos(q2) + q3\cdot\sin(q2) + L4\cdot\cos(q4)\cdot\sin(q2) \\ -\sin(q4) & -\cos(q4) & 0 & q1 - L4\cdot\sin(q4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Cinemática Inversa



Link	θ	d	a	α
1	π/2	q1	0	0
2	q2	0	L2	0
3	q3	L1	L3	0

$$A_0^{\ 3} = \begin{pmatrix} -\sin(q2+q3) & -\cos(q2+q3) & 0 & -L3\cdot\sin(q2+q3) - L2\cdot\sin(q2) \\ \cos(q2+q3) & -\sin(q2+q3) & 0 & L3\cdot\cos(q2+q3) + L2\cdot\cos(q2) \\ 0 & 0 & 1 & L1 + q1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intuición Algebraica

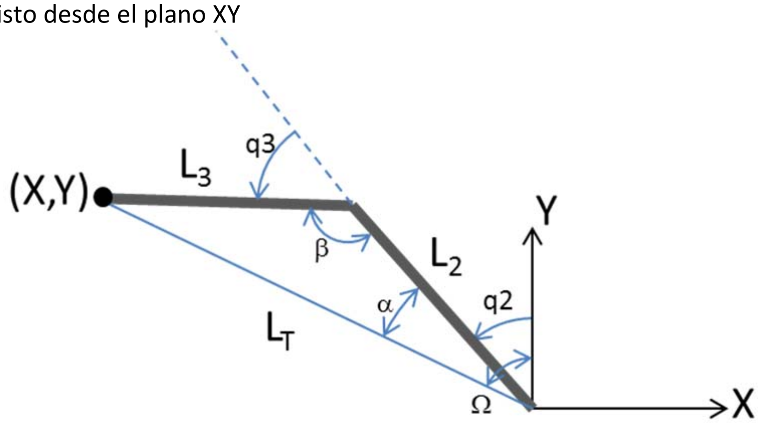
$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(q2+q3) & -\cos(q2+q3) & 0 & -L_3\cdot\sin(q2+q3) - L_2\cdot\sin(q2) \\ \cos(q2+q3) & -\sin(q2+q3) & 0 & L_3\cdot\cos(q2+q3) + L_2\cdot\cos(q2) \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + q1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_3\cdot\sin(q2+q3) - L_2\cdot\sin(q2) \\ L_3\cdot\cos(q2+q3) + L_2\cdot\cos(q2) \\ L_1 + q1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$q1 = Z - L_1$

q2 y q3 muy complicado despejarlos

Intuición Geométrica

Visto desde el plano XY



Se puede observar que

$$\Omega = \operatorname{atan}\left(\frac{-X}{Y}\right)$$

Por Pitágoras tenemos

$$L_T^{\,2} = X^2 + Y^2$$

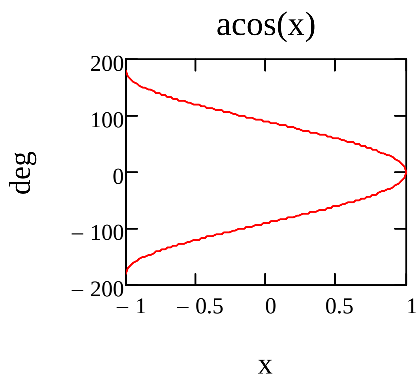
Luego si se conocen los 3 lados de un triangulo se conocen todos sus ángulos

Por el teorema del coseno tenemos

$$L_T^{\,2} = L_2^{\,2} + L_3^{\,2} - 2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \cos(\beta)$$

$$\beta = \operatorname{acos}\left(\frac{L_2^{\,2} + L_3^{\,2} - L_T^{\,2}}{2 \cdot L_2 \cdot L_3}\right)$$

La función acos por cada valor de entrada entre -1 y 1 vamos a tener dos valores, uno positivo y uno negativo



Entonces para β va a tener 2 soluciones

$$\beta = \operatorname{acos}\left(\frac{L_2^{\,2} + L_3^{\,2} - L_T^{\,2}}{2 \cdot L_2 \cdot L_3}\right)$$

Solución codo arriba

$$\beta = -\operatorname{acos}\left(\frac{L_2^{\,2} + L_3^{\,2} - L_T^{\,2}}{2 \cdot L_2 \cdot L_3}\right)$$

Solución codo abajo

Ya tenemos b y nos falta calcular a, esta se puede calcular nuevamente por el teorema del coseno o por el teorema del seno

$$\frac{L_3}{\sin(\alpha)} = \frac{L_T}{\sin(\beta)}$$

$$\alpha = \operatorname{asin}\left(\frac{L_3}{L_T} \cdot \sin(\beta)\right)$$

Como b tiene 2 soluciones entonces a también tendrá 2 soluciones
Y por lo tanto q2 y q3 también va a tener 2 soluciones

$$q2 = \Omega - \alpha$$

$$q3 = \pi - \beta$$

X	Y	Z	q1	q2		q3	
5	5	1	0	–90	0	90	270
0	10	0	–1	0	0	0	0
–10	0	4	3	90	0	90	0
0	0	–1	–2	γ	γ	180	180

En el último punto se observa que existe una singularidad ya que existen infinitas soluciones
Es por esto que cualquier valor que pongamos en q2 satisface este punto siempre y cuando q3 sea 180 grados

3 Rotaciones
$R_1^3 = R_1^2\, R_2^3$
$(R_1^2)^{-1} R_1^3 = R_2^3$
$R_2^3 = (R_1^2)^T R_1^3$
$R_2^3 = R_2^1 R_1^3$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

4 Teoría

A_M^N
Columna 1
$\hat{\imath}_N$ Visto desde el sistema de coordenadas M
Columna 2
$\hat{\jmath}_N$ Visto desde el sistema de coordenadas M
Columna 3
$\hat{k}_N$ Visto desde el sistema de coordenadas M
Columna 4
Vector de traslación

Colocar el ultimo sistema de coordenadas en el elemento final nos sirve para conseguir la posición de ese elemento final colocando en el origen su posición desde el ultimo sistema de coordenadas, así al multiplicar la matriz de transformación homogénea por la posición del elemento final vista desde el ultimo sistema de coordenadas nos queda que X, Y, Z solo dependen de la ultima columna de la matriz de transformación homogénea